数理解析研究所講究録
337巻 1978年 211-221

正規定常過程のT－正値性とマルコフ性
——Langevin方程式——
——揺動散逸定理——

東大 理　岡部靖憲

§1 序　T－正値性と揺動散逸定理

場の理論よりでてきた概念であるT－正値性について[1]、確率過程論の立場より、その数学的構造を明らかにし、揺動散逸定理の数学的理論を立てることを目的にし、この報告では、その一端を述べることにする。

$\mathbb{X} = (X(t); t \in \mathbb{R})$ を、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実数値の正規定常過程とし、平均は0で、共分散函数 R は連続とする：

$$R(t-s) = E(X(t)X(s)) \equiv (X(t), X(s)).$$

Hilbert空間 $\mathcal{M}$ を、$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の中で、$X(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ すべてによって張られる閉部分空間によって定義し、$\mathcal{M}^+$ (resp $\mathcal{M}^-$) を、$X(t)$ $(t \geq 0)$ (resp $X(t)$, $t \leq 0$) によって張られる閉部分空間とする。$\mathcal{M}^+$ は未来、$\mathcal{M}^-$ は過去を表わす空間である。このとき、$\mathcal{M}$ 上で、unitaryで対称な、時間反転 (time-reflection) とよばれる作用素 T が、

$$TX(t) = X(-t)$$

によって定義される。P_{M^+} を、M から M^+ への直交射影を表わすものとするとき、X が T－正値性 をもつとは、

$$P_{M^+} T P_{M^+} \geq 0$$

が成り立つときをいう。

このことは、$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathbb{C}$, $\forall t_1, \cdots, t_n \in [0, \infty)$ に対して、

$$\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j R(t_j + t_k) \overline{\xi_k} \geq 0$$

が成り立つことと同値である。

従って、Widder の研究よりもわかることだが、共分散函数 R が、$[0,\infty)$ 上の非負の有界測度 $d\sigma$ によって、

$$R(t) = \int_0^{\infty} e^{-|t|\lambda} d\sigma(\lambda) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表現されることとも同値である（[4]）。

我々の目的は、T－正値性をもった X を支配する運動方程式を求めることであるが、その背景を少し説明する。正数 λ に対して、

$$R_\lambda(t) \equiv e^{-|t|\lambda} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

は、T－正値性をもった正規定常過程の共分散函数となるが、上の表現式は、T－正値性をもつ一般の正規定常過程の共分散函数 R は、

$$R(t) = \sigma(\{0\}) + \int_{(0,\infty)} R_\lambda(t) \, d\sigma(\lambda)$$

と分解されることを意味している。一方、R_λ を共分散にもつ正規定常過程 X_λ ：

$$R_\lambda(t-s) = (X_\lambda(t),\ X_\lambda(s))$$

は、Ornstein-Uhlenbeckのブラウン運動とよばれ、次のLangevin equationといわれる確率微分方程式によって記述される：

$$X_\lambda(t)-X_\lambda(s) = -\lambda\int_s^t X_\lambda(u)\,du + (2\lambda)^{\frac{1}{2}}(B(t)-B(s)) \quad (s<t)$$

標語的には、

$$\dot{X}_\lambda(t) = -\lambda X_\lambda(t) + (2\lambda)^{\frac{1}{2}}\dot{B}(t)$$

我々の最初の目的は、T-正値性をもつ正規定常過程に対して、その運動を支配する方程式として、無限次元のLangevin equation[2]を導入することによって、特徴付けることである。

次の目的は、X_λを支配するLangevin方程式において、drift係数、diffusion係数がそれぞれ、$-\lambda$, $(2\lambda)^{\frac{1}{2}}$ $(\lambda>0)$ となっているのは、何故か。もう少し一般に、drift係数を$-\alpha$、diffusion係数をβ $(\alpha>0, \beta\neq 0)$ とする拡散方程式

$$\dot{X}(t) = -\alpha X(t) + \beta\dot{B}(t)$$

に内蔵する性質は何なのか。これに答えるのが、いわゆるEinsteinの関係式とよばれるもので、揺動散逸定理の静的な部分を表わしている。このことを、無限次元のLangevin方程式に対して、又、多次元の正規拡散方程式に対して調べてみる。

前半の目的である、無限次元のLangevin方程式を求め特徴付ける際に、Lax-Phillipsの散乱理論の一端が用いられる。

このことを、さらに追求すると、S－行列が具体的に計算され、Langevin方程式を完全に記述する。さらに、その具現化として、弦の振動方程式がえられる。一方、もともと、T-正値性は、場のモデルを構成するために導入されたものであったから、我々の場合にも、場の作用素が求められ、Langevin方程式を介して、逆散乱問題と場の作用素との関係がつくものと思われる。これは、最近の、佐藤－三輪－神保氏の研究の一次元のモデルを与えるものと思われる。ただし、相互作用は、それ程強くない（Jacobi行列）。このことに関して、別の機会に報告したいと思う。

§2. Hamiltonian system

M^{T+} を、$P_{M^{T+}}Y$ $(Y\in M^-)$ によって張られる閉部分空間とする。このとき、

Theorem 2.1. $\exists H$：自己共役作用素 on M^{T+} $\ni$

(i) 単純スペクトルをもち、$X(0)$がひとつのgenerating vectorである.

(ii) $R(t) = (e^{-|t|H}X(0), X(0))$.

(iii) $d\sigma(\lambda) = d(E(\lambda)X(0), X(0))$, 但し $(E(\lambda);\lambda\in\mathbb{R})$ は、Hの単位の分解.

M. H. Stone's Theorem を使うことによって、

<u>Theorem 2.2</u>　次の三条件は同値である：

(i)　X は　純非決定的

(ii)　$d\sigma(\{0\}) = 0$.

(iii)　$H > 0$.

そこで、我々は、 <u>三つ組 $[\mathcal{X}, H, x_0]$</u> が次の条件を満足するとき、 <u>Hamiltonian system</u> という.

(H.1)　$\mathcal{X}$ は H-sp. , $x_0 \in \mathcal{X}$.

(H.2)　H は　正の自己共役作用素で、単純スペクトルをもち、x_0 がひとつの生成元である.

<u>Theorem 2.3</u>

純非決定的、T-正値性をもつ正規定常過程 X

$\updownarrow$

Hamiltonian system $[\mathcal{X}, H, x_0]$

対応は、　$X(0) \longleftrightarrow x_0$

$$R(t) = (e^{-|t|H}x_0, x_0) .$$

§3.　<u>無限次元の Langevin 方程式</u>

$[\mathcal{X}, H, x_0]$ をひとつの Hamiltonian System とする。 Theorem 2.3 で対応する正規定常過程 X は純非決定的ゆえ、標準表現が可能で、前向き表現にでてくるブラウン運動を $(B(t); t \in \mathbb{R})$ とする：

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}^{-1} E(t-s)\, dB(s) , \quad E \in L^2((0,\infty))$$

$$\sigma(X(s);\, s \le t) = \sigma(B(s_2) - B(s_1);\quad s_1 < s_2 \le t).$$

H-sp $\mathcal{H}$ を、

$$\mathcal{H} = \Big\{ Y \in L^2((0,\infty)\times\Omega,\, d\sigma\times dP);\ \exists f \in L^2((0,\infty)\times\mathbb{R},\, d\sigma\times ds) \ni Y(\lambda,\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda,s)\, dB(s,\omega) \Big\}$$

によって定義する。

<u>Theorem 3.1</u> $\exists\ \Xi = (\xi(t);\, t\in\mathbb{R}) \ni$

(i) $\xi(t):\ \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{H}$ bounded linear

(ii) $\xi(0) = 0,\quad (\xi(s)x,\, \xi(t)y) = s\wedge t\cdot(x,y)$

(iii) $\displaystyle\bigvee_{t\in\mathbb{R}} \xi(t)\mathcal{X} = \mathcal{H}.$

<u>Remark 3.1</u> この Ξ は、ブラウン運動 $(B(t);\, t\in\mathbb{R})$ を用いて表わされる。この Ξ を <u>Operator-valued の Brown 運動</u> とよぶことにする。

この Ξ を用いて、$\mathcal{X}$ より $\mathcal{H}$ への作用素 $\mathscr{X}(t)$ を、

$$\mathscr{X}(t)x \equiv \int_{\mathbb{R}} \xi(ds)\, \chi_{(0,\infty)}(t-s)\sqrt{2H}\, e^{-(t-s)H} x$$

によって定義する。積分は、Ξ に関する確率積分である。

$\mathscr{X}(t)$ の集まりを $\mathfrak{X} \equiv (\mathscr{X}(t);\, t\in\mathbb{R})$ とおくとき、

<u>Theorem 3.2</u>

(i) $\mathfrak{X}$ は定常過程である; 即ち、

$$(\mathscr{X}(s)x,\, \mathscr{X}(t)y) = (e^{-|t-s|H}x,\, y).$$

が成り立つ.

(ii) $\mathcal{X}$ は 純非決定的である; $\mathcal{H}^-(t) \equiv \bigvee_{s \le t} \mathcal{X}(s)\mathcal{K}$ とおくとき、$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^-(t) = \{0\}$

(iii) $\mathcal{X}$ はマルコフ性をもつ; $\mathcal{H}^+(t) \equiv \bigvee_{s \ge t} \mathcal{X}(s)\mathcal{K}$, $\mathcal{H}^{+/-}(t) \equiv \bigvee \{ P_{\mathcal{H}^-(t)} Y ; Y \in \mathcal{H}^+(t) \}$, $\mathcal{H}(t) \equiv \mathcal{X}(t)\mathcal{K}$ とおくとき、

$$\mathcal{H}^{+/-}(t) = \mathcal{H}(t)$$

もっと詳しく、$P_{\mathcal{H}(t)} \mathcal{X}(t+s) x = \mathcal{X}(t) T_s x \quad (t \in \mathbb{R}, s > 0)$.

(iv) x_0 は $\mathcal{X}$ の generating vector である;

$$\bigvee \{ P_{\mathcal{H}(0)} \mathcal{X}(t) x_0 ,\ t \in [0, \infty) \} = \mathcal{H}(0).$$

(v) $\mathcal{X}$ は次の確率微分方程式の一意解である;

$\underline{s < t,\ x \in \mathcal{D}(H)}$

$$\underline{\mathcal{X}(t)x - \mathcal{X}(s)x = -\int_s^t \mathcal{X}(u) H x \, du + (\xi_t - \xi_s)\sqrt{2H}\, x}$$

この方程式を、$\underline{[\mathcal{K}, \mathcal{H}, \xi]\text{- Langevin equation}}$ と名付ける。

そこで、我々は、<u>四つ組 $[\mathcal{K}, \mathcal{H}, \mathcal{X}, x_0]$</u> が Theorem 3.2の (i)〜(iv) を満足するとき、<u>定常マルコフ系</u>とよぶことにすると、

Theorem 3.3

$$\begin{array}{c}\text{Hamiltonian system} \quad [\mathcal{X}, H, x_0] \\ \Big\updownarrow \quad [\mathcal{X}, \mathcal{H}, \Xi]\text{- Langevin equation} \\ \text{Stationary Markovian system } [\mathcal{X}, \mathcal{H}, \mathcal{X}, x_0]\end{array}$$

§4 揺動散逸定理

次の拡散方程式を考えよう.

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \beta dB(t) \qquad \alpha>0, \beta\neq 0$$

この diffusion の transition probability density $p(t,x,y)$ は、

$$\begin{cases} p(t,x,y) = \dfrac{1}{(2\pi\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(y-e^{-\alpha t}x,\ \Lambda^{-1}(t)(y-e^{-\alpha t}x))} \\ \Lambda(t) = \dfrac{\beta^2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha t}) \end{cases}$$

従って、

$$p(t,x,y) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{(2\pi\frac{\beta^2}{2\alpha})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2\frac{\beta^2}{2\alpha}}} = N(0,\frac{\beta^2}{2\alpha})(y)$$

即ち $p(t,x,y)$ の不変測度が $N(0,\frac{\beta^2}{2\alpha})(y)$ で与えられ、これを正規化即ち $\frac{\beta^2}{2\alpha}=1$ としたときが、§1にのべた Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動を記述する Langevin equation であったと理解される。

もっと、一般に、次の線型の確率微分方程式を考えよう。

$$d\mathfrak{X}(t) = A\cdot\mathfrak{X}(t)dt + B\,dB(t)$$

但し A は $N\times N$-matrix, Bは $N\times r$-matrix,

$B(t)$は r 次元のブラウン運動

次の完全制御のための条件をいれる.

$$\mathrm{rank}\,[B, AB, A^2B, \cdots; A^{N-1}B] = N$$

このとき、上の diffusion の transition probability density $p(t,x,y)$ は存在し

$$\begin{cases} p(t,x,y) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}(y-e^{tA}x,\ \Lambda^{-1}(t)(y-e^{tA}x))} \\ \Lambda(t) = \displaystyle\int_0^t e^{sA}B\cdot B^* e^{sA^*}ds \end{cases}$$

と表現される。

<u>Theorem 4.1</u>　次の三条件は同値である:

(i)　Aの固有値の実部がすべて負 (stable)

(ii)　$\exists\Lambda$: pos. definite sym. $\ni$
(ヨ)

$$A\Lambda + \Lambda A^* = -B\cdot B^*$$

(iii)　$p(t,x,y)$は唯ひとつの不変測度をもち、それは、

$N(0,\Lambda)(y)dy$ で与えられる。

このとき、

$$(*)\quad \begin{cases} p(t,x,y) \xrightarrow[t\to\infty]{} N(0, \Lambda(\infty))(y) \\ \Lambda(\infty) = \displaystyle\int_0^\infty e^{sA}BB^* e^{sA^*}ds \end{cases}$$

<u>Remark 4.1</u>　Theorem 4.1 (ii) の関係式が、<u>Einsteinの関係</u>とよばれ、その数学的特徴付けが、(*) である。([5]).

最後に、§3の Langevin equation に対して見てみよう。

<u>$\dim \mathcal{X} = N < \infty$ のとき.</u>

このときは、Hの固有ベクトルを bases にとって、$\xi(t)$を座標表現すると、Theo 3.2 (v) の $[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \xi]$ – Langevin equation は、

$$d \underset{\underset{\mathbb{R}^N}{\cap}}{\eta(t)} = -\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \eta(t)\,dt + \mu \cdot dB(t)$$

$$\left(He_n = \lambda_n e_n, \quad \mu_n = \frac{\sqrt{2\lambda_n}}{x_n}, \quad X(0) = \sum_1^N x_n e_n \right)$$

と書ける。これは、初めにのべた特徴の場合で、揺動散逸定理が成り立つ。

<u>$\dim \mathcal{X} = \infty$ のとき.</u>

さらに制限して、Hは、固有ベクトル e_n によって決まっているとし、固有値 λ_n が $\sum_1^\infty \lambda_n^{-\delta} < \infty \ (\delta > 0)$ を満足しているとする。このときは、前と同様に、$[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \xi]$ – Langevin equation は、

$$\underset{\underset{l_2}{\cap}}{d\eta(t)} = -\underset{\underset{H}{\shortparallel}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}} \eta(t)\,dt + \underset{\underset{l_2}{\cap}}{\mu} \cdot dB(t)$$

となる。このとき、

$$\begin{cases} E\left(e^{i(\eta, \eta(t))} \mid \eta(0) = \xi\right) = e^{i(\eta, e^{-tH}\xi) - \frac{1}{2}(\eta, \Lambda(t)\eta)} \\ \qquad \xi, \eta \in l_2 \\ (\Lambda(t))_{mn} = (\lambda_m + \lambda_n)^{-1} \mu_m \mu_n \left(1 - e^{-(\lambda_m + \lambda_n)t}\right) \end{cases}$$

と与るから、

$$(\Lambda(\infty))_{mn} = \frac{\mu_m \mu_n}{\lambda_m + \lambda_n}$$

とおくことによって、

$$E(e^{i(\eta, \xi(t))} \mid \xi(0) = \xi) \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}(\eta, \Lambda(\infty)\eta)}$$

が成り立ち、さらに

$$H \cdot \Lambda(\infty) + \Lambda(\infty) H = \mu \cdot \mu^*$$

が成り立つ。従って、この意味では、無限次元のときも、揺動散逸定理が成り立つ。

一般のときは、Jacobi行列と関連してくるのだが、別の機会へ報告する。

文献

[1] G.C. Hegerfeldt. From euclidean to relativistic fields and on the notion of Markov fields, Comm. Math. Phys. 35 (1974), 155–171

[2]. J.T. Lewis & L.C. Thomas A characterization of regular solutions of a linear stochastic differential equation Zeitschr. für Wahr., 30 (1974), 45–55

[3] 岡部靖憲 正規定常過程のT－正値性とマルコフ性 — Langevin equation — Sem. on Prob. 47 (1977), 他9編

[4] L. Streit & T. Hida. On Quantum theory in terms of white noise, Pre-Print.

[5] 堀淳一, ランジュバン方程式, 岩波(1977) 以上。